

2018

MATHEMATICS

(General)

Paper : 6.1

(Linear Algebra and Complex Analysis)

Full Marks : 80

Time : 3 hours

*The figures in the margin indicate full marks
for the questions*

Answer either in English or in Assamese

1. Answer the following as directed : 1×10=10

তলত দিয়াবোৰৰ নিৰ্দেশ অনুসৰি উত্তৰ কৰা :

(a) Write the condition for a function ϕ to be harmonic.

এটা ফলন ϕ , হৰ্বাৰ্ছক ফলন হোৱাৰ চৰ্তটো লিখা।

(b) Write a basis for $V_4(\mathbb{R})$.

$V_4(\mathbb{R})$ ৰ এটা ভূমি লিখা।

(c) Write the condition so that union of two subspaces is again a subspace.

দুটা সদ্দিশ উপক্ষেত্ৰৰ মিলন এটা সদ্দিশ উপক্ষেত্ৰ হোৱাৰ চৰ্তটো লিখা।

(d) Write the Cayley-Hamilton theorem.

কেইলে-হেমিল্টন উপপাদ্যটো লিখা।

(e) Write the rank of the following matrix :

তলৰ মৌলকক্ষটোৰ কোটি লিখা :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(f) Write the Cauchy-Riemann equations.

কশি-বাইমানৰ সমীকৰণসমূহ লিখা।

(g) If $f(z)$ is analytic and $f'(z)$ is continuous in the circle C , then

যদি $f(z)$ বৈশ্লেষিক, C বক্রত $f'(z)$ অবিচ্ছিন্ন হয়, তেতিয়া

(i) $\int_C f(z) dz = 0$

(ii) $\int_C f(z) dz > 0$

(iii) $\int_C f(z) dz < 0$

(iv) None of the above

ওপৰৰ এটাও নহয়

(Choose the correct answer)

(শুদ্ধ উত্তৰটো বাছি উলিওৱা)

(h) $T: R^2 \rightarrow R^2$ is defined as follows.

ফলন $T: R^2 \rightarrow R^2$ তলত দিয়া ধৰণে দিয়া আছে।

(i) $T(a, b) = (1 + a, b)$

(ii) $T(a, b) = (b, a)$

(iii) $T(a, b) = (a + b, a)$

(iv) $T(a, b) = (a, 0)$

Which of the above is a linear transformation?

ওপৰৰ কোনটো বৈখিক ৰূপান্তৰ ?

(i) If $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ exists, then it must be

যদি $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ স্থিত হয়, তেতিয়া ই

(i) 0/শূন্য

(ii) unity/একক

(iii) unique/অদ্বিতীয়

(iv) None of the above

ওপৰৰ এটাও নহয়

(Choose the correct answer)

(শুদ্ধ উত্তৰটো বাছি উলিওৱা)

(j) If A is $r \times s$ matrix, where $r > s$, what is the maximum rank of A ?

যদি A এটা $r \times s$ আকৃতিৰ মৌলকক্ষ হয়, তেতিয়া A ৰ উচ্চতম কোটি কিমান হ'ব পাৰে, য'ত $r > s$?

2. Answer any *two* of the following : $2 \times 2 = 4$

তলত দিয়াবোৰৰ যি কোনো দুটাৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Whether the vectors $(2, 0, 3)$ and $(-4, 0, -6)$ are linearly dependent? Express one as the scalar multiple of the other.

$(2, 0, 3)$ আৰু $(-4, 0, -6)$ ভেক্টৰ দুটা বৈধিক পৰতন্ত্ৰ হয়নে? এটাক আনটোৰ স্কেলাৰ পূৰণ হিচাপে প্ৰকাশ কৰা।

(b) Show that $R(C)$ is not a vector space, where R is the set of reals and C is the set of complex numbers.

দেখুওৱা যে $R(C)$ এটা সদিশ স্থান নহয়, য'ত R বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি আৰু C জটিল সংখ্যাৰ সংহতি।

(c) If W_1 and W_2 are subspaces of a vector space $V(F)$, then show that $W_1 + W_2$ is also a subspace of $V(F)$.

যদি W_1 আৰু W_2 দুটা $V(F)$ সদিশ স্থানৰ উপস্থান হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে, $W_1 + W_2$ ও এটা $V(F)$ ৰ উপস্থান।

3. Answer any *three* of the following : $2 \times 3 = 6$

তলত দিয়াবোৰৰ যি কোনো তিনিটাৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Find the rank of A :

A ৰ কোটি নিৰ্ণয় কৰা :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) Show that (দেখুওৱা যে)

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

(c) Using definition of exponential function, show that $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

সূচকীয় ফলনৰ সংজ্ঞা ব্যৱহাৰ কৰি, প্ৰমাণ কৰা যে $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

(d) If C is the circle $|z - a| = r$, then evaluate

$$\int_C \frac{dz}{z - a}$$

যদি C , $|z - a| = r$ বৃত্তটো হয়, তেতিয়া $\int_C \frac{dz}{z - a}$ ৰ

মান নিৰ্ণয় কৰা।

4. Answer any four of the following : 5×4=20

তলত দিয়াবোৰৰ যি কোনো চাৰিটাৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Show that $W = \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$ is a subspace of \mathbb{R}^2 .

দেখুওৱা যে $W = \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$, \mathbb{R}^2 ৰ এটা উপস্থান।

(b) Define linearly independent set. Show that subset of a linearly independent set is linearly independent.

বৈধিক স্বতন্ত্ৰ সংহতিৰ সংজ্ঞা দিয়া। দেখুওৱা যে এটা বৈধিক স্বতন্ত্ৰ সংহতিৰ উপসংহতিবোৰ বৈধিক স্বতন্ত্ৰ।

(c) Show that the vectors $(1, 1, -1)$, $(2, -3, 5)$ and $(-2, 1, 4)$ of \mathbb{R}^3 are linearly independent.

দেখুওৱা R^3 ৰ ভেক্টৰ $(1, 1, -1)$, $(2, -3, 5)$ আৰু $(-2, 1, 4)$ বৈধিক স্বতন্ত্ৰ।

- (d) Show that the linear span $L(S)$ is a subspace of a vector space $V(F)$, where $S \subseteq V$.

দেখুওৱা যে বৈধিক বিস্তাৰ $L(S)$, $V(F)$ সদিশ স্থানৰ এটা উপস্থান, য'ত $S \subseteq V$.

- (e) Let $T: U \rightarrow V$ be a linear transformation from vector space U to V . Show that the null space $N(T)$ is a subspace of $U(F)$.

ধৰা হল, $T: U \rightarrow V$ এটা সদিশ স্থান U ৰ পৰা আনটো সদিশ স্থান V লৈ এটা বৈধিক ৰূপান্তৰ। দেখুওৱা যে শূন্যস্থান $N(T)$, $U(F)$ ৰ এটা উপস্থান।

5. Answer any two of the following : 5×2=10

তলত দিয়াবোৰৰ যি কোনো দুটাৰ উত্তৰ কৰা :

- (a) Using Cauchy integral formula, evaluate
ক্ৰিচি সমাকল সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰি, মান নিৰ্ণয় কৰা

$$\oint_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz$$

where (য'ত), $C: |z|=3$.

- (b) Show that $f(z) = e^z$ is analytic at every point of the complex plane.

দেখুওৱা যে $f(z) = e^z$ ফলনটো জটিল সংখ্যাৰ সকলো বিন্দুত বৈশ্লেষিক।

(c) If $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = l$, prove that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}\{z_n\} = \operatorname{Re}\{l\}$$

যদি $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = l$, প্রমাণ কৰা যে

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}\{z_n\} = \operatorname{Re}\{l\}$$

6. Define eigenvalues of a matrix. Find all eigenvalues and eigenvectors of the following matrix :

10

মৌলকক্ষৰ আইগেনমানৰ সংজ্ঞা দিয়া। তলৰ মৌলকক্ষটোৰ সকলোবোৰ আইগেনমান আৰু আইগেনভেক্টৰ নিৰ্ণয় কৰা :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Or / অথবা

Verify Cayley-Hamilton theorem for the following matrix A. Hence find A^{-1} :

তলৰ মৌলকক্ষ A ব বাবে কেইলে-হেমিল্টন উপপাদ্যটো প্ৰতিপন্ন কৰা। লগতে A^{-1} নিৰ্ণয় কৰা :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

7. Show that the set of all $m \times n$ matrices with their elements in a field K is a vector space under usual matrix addition and multiplication of a matrix by an element of the field.

10

দেখুওৱা যে $m \times n$ আকাৰৰ মৌলকক্ষৰ সংহতিটোৱে এটা সদিশ স্থান গঠন কৰে, য'ত মৌলকক্ষৰ মৌলবোৰ এখন ক্ষেত্ৰ K ৰ পৰা লোৱা হৈছে আৰু মৌলকক্ষবোৰে সাধাৰণ মৌলকক্ষৰ যোগ আৰু পূৰণৰ নিয়ম মানি চলে।

Or / অথবা

Find the rank of the following matrix reducing it to the Echelon form :

তলৰ মৌলকক্ষটোক ইকেলন আকাৰত প্ৰকাশ কৰি তাৰ কোটি নিৰ্ণয় কৰা :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

8. State and prove Cauchy integral formula. 10

কশি সমাকল সূত্ৰটো লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা।

Or / অথবা

Define analytic function. Find the analytic function $f(z) = u + iv$, whose real part is $u = e^x(x \cos y - y \sin y)$.

বৈশ্লেষিক ফলনৰ সংজ্ঞা লিখা। এটা বৈশ্লেষিক ফলন $f(z) = u + iv$ উলিওৱা যাৰ বাস্তৱ অংশ $u = e^x(x \cos y - y \sin y)$.
